Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Algebra 1- Lavoro Guidato - Dr. Francesca Tartarone
Lunedí 8 ottobre

1. Determinare per ognuna delle seguenti relazioni quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva sono soddisfatte.

Relazioni su $\mathbf{Z}$

a) $x\rho y \iff \exists k\in\mathbf{Z},\ k \neq 0,$ tale che $x = ky$;
b) $x\rho y \iff \exists k\in\mathbf{Q},\ k \neq 0,$ tale che $x = y^k$;
c) $x\rho y \iff \exists k\in\mathbf{Z}$ tale che $x - y = 13k$;
d) $x\rho y \iff \exists k\in\mathbf{Z}$ tale che $x - y = 13$;
e) $x\rho y \iff \mathrm{MCD}(x, 5) = \mathrm{MCD}(y, 5)$;
f) $x\rho y \iff x - y$ è pari;
g) $x\rho y \iff |x| = |y|$.

Relazioni su $\mathbf{R}$

a) $x\rho y \iff \exists k\in\mathbf{Z}\ k \neq 0$ tale che $x = y^k$;
b) $x\rho y \iff \exists k\in\mathbf{Q}\ k \neq 0$ tale che $x = y^k$;
c) $x\rho y \iff xy > 0$;
c) $x\rho y \iff \sin^2(x) = \cos^2(y)$;
c) $x\rho y \iff \sin^2(x) + \cos^2(y) = 1$.

Relazioni Su $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

a) $(a, b)\rho(c, d) \iff a - c, b - d \in \mathbf{Z}$;
b) $(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2) \iff (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leq 1$
c) $(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2) \iff x_1y_1 = x_2y_2$

2. Per ognuna delle relazioni dell'esercizio precedente che è risultata essere una relazione d'equivalenza determinare le classi d'equivalenza e l'insieme quoziente.

3. Dato $x\in\mathbf{Z}$ denotiamo con $[x]$ la parte intera di x (cioe $x = [x] + r$ con $0 \leq r < 1$). Denotiamo ρ la relazione su $\mathbf{Z}$ definita da $x\rho y \iff [x] = [y]$.

a) Verificare che ρ è un relazione d'equivalenza.
b) Determinare la classe di equivalenza di ogni elemento di X ;
b) Determinare l'insieme quoziente X/ρ.

4. Studiare l'applicazione $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ definita come $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e descrivere esplicitamente $f(0), f^{-1}(6), f^{-1}(14)$.

5. Dimostrare che l'applicazione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = ax + b$ è biiettiva per ogni $a \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ e per ogni $b \in \mathbf{R}$ e determinare l'inversa.

6. Siano X, Y e Z tre insiemi e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ due funzioni. Determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè:

a) $g \circ f$ sia iniettiva
b) $g \circ f$ sia suriettiva.

Supponendo che g e f siano biettiva si dimostri che $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
7. Date $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (x+3)^3$, e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 5x - 4$, costruire f^{-1} e g^{-1} e verificare che $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
8. Date $f : \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; xy = 1\} \to \mathbf{R}^2, (x,y) \mapsto (y, y^2 - 1)$, e $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (z,w) \mapsto \frac{w}{z-1}$. Determinare se $g \circ f$ è iniettiva e/o suriettiva.
9. Verificare se l'applicazione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2|x|$ è iniettiva e/o suriettiva.