Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Algebra 1- Lavoro Guidato - Dr. Francesca Tartarone
Lunedí 10 dicembre

1. Elencare i polinomi del tipo $3X^2 + cX + 4$ che sono primi in $\mathbb{Z}_5[X]$.

2. Sia $A \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Mostrare che se $f \in A[X]$, $\deg(f) \geq 2$, ha una radice in A, allora f è riducibile in A.

3. Sia $f \in \mathbb{R}[X]$. Mostrare che:

(1) se α è una radice complessa di f, allora $\overline{\alpha}$ è anche una radice di f;
(2) se $\deg(f)$ è dispari, allora f ha almeno una radice reale.

4. Se $f(X) = X^n - \alpha \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \geq 0$ ed n è pari, allora f ha due radici reali, una positiva ed una negativa.

5. Se A è un dominio, $U(A[X_1, \cdots, X_n]) = U(A)$.

6. Determinare esplicitamente i divisori di $f(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$, se $f(X) = 15X, 15X + 3, 6X^2 - 5X + 1$.

7. Mostrare che il polinomio $f(X) = 2X^3 + 2X + 3$ è invertibile in $\mathbb{Z}_8[X]$ e determinare il suo inverso.

8. Trovare tutti i polinomi irriducibili di secondo grado di $\mathbb{Z}_3[X]$.
Mostrare che il polinomio $f(X) = X^5 - 5X^4 - 6X + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[X]$.