UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2001/2002
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Seconda prova di valutazione intermedia
10 gennaio 2002

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. In $\mathbb{Q}^+$ (insieme dei numeri razionali positivi) sia $*$ l'operazione definita da:

$$a * b := \frac{ab}{3}.$$

(1) Provare che $(\mathbb{Q}^+, *)$ è un gruppo abeliano.
(2) Provare che la seguente equazione possiede un'unica soluzione e determinarla:

$$7 * X = 11.$$

2. In S_8 siano date le permutazioni:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare la permutazione $\alpha^2 \circ \beta^{-1}$ e decomporla in cicli disgiunti.
(2) Determinare la parità e l'ordine di $\alpha^2\beta^{-1}$.

3. Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3X \equiv 5 \pmod{7} \\ 8X \equiv 6 \pmod{9} \\ 15X \equiv 8 \pmod{16} \end{cases}$$

4. Dato il polinomio $f(X) = X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 14X + 26$ in $\mathbb{R}[X]$:

(1) verificare che $3 + 2i$ è una radice di $f(X)$;
(2) decomporre il polinomio $f(X)$ nel prodotto di fattori irriducibili in $\mathbb{R}[X]$ e $\mathbb{C}[X]$.

5. Provare che i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}[X]$ sono irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$:

(1) $f(X) = X^4 - X^2 + 1$;
(2) $g(X) = 2X^4 - 8X^2 + 1$.