UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2001/2002
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Prima prova di valutazione intermedia
7 novembre 2001

*Cognome*__________________ *Nome*_______________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. (6 pt) Se $x \in \mathbb{R}$, sia $[x]$ il più grande intero minore o uguale ad x, detto anche **parte intera di** x. Siano le applicazioni $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definite nel modo seguente:

$$g(z) := 2z, \qquad f(z) := [z/2].$$

1. Descrivere l'applicazione $g \circ f$ e dire se essa è uguale a $f \circ g$.
2. Cosa si può dire sulle proprietà di iniettività e di suriettività di f e di g?
3. Si potrebbero trovare due funzioni con le stesse proprietà di f e di g se al posto di $\mathbb{Z}$ si considerasse un insieme finito?

2. (7 pt) Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{N}$:

$$S = \{2^a 5^b 11^c \mid a, b, c, \in mathbbN\}.$$

Si consideri in S la seguente relazione d'equivalenza ρ:

$$(2^a 5^b 11^c)\rho(2^\alpha 5^\beta 11^\gamma) \Longleftrightarrow a + b + c = \alpha + \beta + \gamma.$$

1. Determinare $[1]_\rho$, $[4]_\rho$, $[5]_\rho$, $[10]_\rho$, $[110]_\rho$.

2. Descrivere l'insieme quoziente S/ρ.

3. (6 pt) Sapendo che ogni numero naturale positivo n può univocamente essere scritto nella forma $n = 2^\alpha(2s+1)$ con α ed s numeri naturali, si consideri in $\mathbb{N}^+$ la seguente relazione d'ordine ρ:
siano $n = 2^\alpha(2s+1)$ ed $m = 2^\beta(2t+1)$

$$n\rho m \iff \begin{cases} n = m \\ \alpha < \beta \quad \text{oppure } \alpha = \beta \text{ e } s < t \end{cases}$$

1. Inserire ρ tra 5 e 22 , 4 e 9, 16 e 20, 10 e 15.
2. Stabilire se ρ gode della proprietà totale.
3. Determinare gli eventuali elementi minimali e massimali di $(\mathbb{N}, \rho)$.

4. (7 pt) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che:

1. per ogni $n > 1$ si ha che

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}\ ;$$

2. per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

5. (7 pt)

1. Trovare le radici ottave dell'unità e stabilire quali di esse sono primitive.
2. Stabilire se tra le radici ottave dell'unità vi sono anche (tutte) le radici quadrate e (tutte) le radici quarte dell'unità.
3. Calcolare il polinomio ciclotomico $\Phi_8(X)$.