UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2001/2002
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Appello X
11 aprile 2002

*Cognome*__________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Risolvere il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 8X \equiv 2 \pmod{11} \\ 6X \equiv 4 \pmod{8} \\ 3X \equiv 6 \pmod{9} \end{cases}$$

e determinare la più piccola soluzione positiva.

2. Siano a, b, x, y elementi di $\mathbb{Z}$ tali che $xa + yb = 1$.

Provare o fornire un controesempio per ciascuna delle seguenti proposizioni:

1. $\mathrm{MCD}(xa, yb) = 1$.
2. $\mathrm{MCD}(xb, ya) = 1$.
3. $\mathrm{MCD}(xy, ab) = 1$.

3. Nell'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si consideri la seguente operazione:

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, bc + d)$$

dove a, b, c, d sono numeri interi.

1. Stabilire se l'operazione $\star$ gode delle proprietà:
   (a) associativa;
   (b) commutativa;
   (c) esistenza di un elemento neutro.
2. Stabilire se $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ è un gruppo.

4. Se n è un numero intero positivo, sia $d(n)$ il numero dei divisori positivi di n (inclusi 1 e n).

1. Trovare $d(4)$, $d(5)$, $d(6)$ e $d(12)$.

2. Dimostrare che se a e b sono numeri interi positivi tali che $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$, allora
$$d(a)d(b) = d(ab).$$

3. Trovare $d(p^m)$ con p numero primo ed m numero intero positivo.

4. Trovare $d(n)$ per ogni numero intero positivo n.

5. Provare che se $f(X)$ è un polinomio monico di $\mathbb{Z}[X]$ e $f(0) = m$ con $m \neq 0$, allora $f(X)$ ha al più $2d(|m|)$ radici razionali.

5. Si considerino i seguenti anelli:

(a) $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$,

(b) $(\mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$

(c) $(\mathbb{Z}_5[X], +, \cdot)$,

(d) $(\mathbb{C}[X], +, \cdot)$,

(e) $(\mathcal{P}(S), \Delta, \cap)$ dove $S = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{P}(S)$ è l'insieme delle parti di S e Δ è la differenza simmetrica di sottoinsiemi di S.

1. Stabilire quali di essi sono domini d'integrità e quali sono campi.

2. Per ciascuno degli anelli assegnati che non sono domini d'integrità, determinare l'insieme degli zero-divisori.

6. Decomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$:

1. $f(X) = X^4 + 81$
2. $g(X) = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 3X + 3.$