**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE**
**Corso di Laurea Triennale in Matematica**
**a.a. 2001/2002**
**AL1 - Algebra 1, fondamenti**
19 gennaio 2002

**Appello A**
**PRIMA PARTE**

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

**Avvertenza:** Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

**1.** Utilizzando il principio di induzione si dimostri che:

(1) Per ogni $n > 1$:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

(2) Se $a$ è un intero dispari, allora per ogni $n \geq 1$ si ha che:

$$a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}.$$

**2.** In $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ si consideri la seguente relazione $\rho$:

$$\alpha\rho\beta \Leftrightarrow \alpha|\beta| = \beta|\alpha|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

(1) Verificare che $\rho$ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
(2) Descrivere esplicitamente:

$$[1]_\rho,\ [i]_\rho,\ [-1]_\rho,\ [-i]_\rho,\ [i+1]_\rho.$$

(3) Descrivere geometricamente le classi di equivalenza di $\rho$.
(4) Determinare, a meno di isomorfismi, l'insieme quoziente.

**3.** Sia $X := \{3, 6, 9\}$ ordinato tramite la relazione di divisibilità e sia $Y := X \times X$ ordinato con l'ordine lessicografico (relativo alla relazione di divisibilità) cioè:

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a|c \text{ e } a \neq c \text{ oppure } a = c \text{ e } b|d.$$

(1) Stabilire se l'insieme ordinato $Y$ è ordinato totalmente.
(2) Determinare gli elementi massimali di $Y$.
(3) Determinare gli elementi minimali di $Y$.
(4) Stabilire se $Y$ ha il minimo ed il massimo.

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE**
**Corso di Laurea Triennale in Matematica**
**a.a. 2001/2002**
**AL1 - Algebra 1, fondamenti**
19 gennaio 2002

**Appello A**
**SECONDA PARTE**

*Cognome*__________________ *Nome*_______________________

*Numero di matricola*__________________

**Avvertenza:** Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

**1.** Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 7X \equiv 4 \pmod{9} \\ 8X \equiv 6 \pmod{13} \\ 11X \equiv 14 \pmod{16} \end{cases}$$

**2.** Si considerino i seguenti anelli:
$(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$,
$(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$
$(\mathbb{Z}_6[X], +, \cdot)$,
$(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$,
$(A := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{ applicazione}\}), +, \cdot)$.

(1) Stabilire quali di essi sono domini d'integrità e quali sono campi.
(2) Per ciascuno dei domini $D$ del punto precedente, determinare l'insieme (gruppo) degli elementi invertibili $U(D)$.

**3.** Nell'anello $\mathbb{Z}_7[X]$ si considerino i polinomi $f(X) = X^4 + \overline{3}X^3 - \overline{2}X^2 - \overline{2}X + \overline{4}$ e $g(X) = X^2 + \overline{2}X + \overline{4}$.

(1) Decomporre $f(X)$ e $g(X)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_7[X]$.
(2) Trovare il $\mathrm{MCD}(f(X), g(X))$.