Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Algebra 1- Lavoro Guidato - Dr. Francesca Tartarone
Martedí 13 novembre

1.

(1) Dimostrare che le radici complesse n-esime di 1 formano un gruppo moltiplicativo.
(2) Che ordine hanno le radici primitive?
(3) Stabilire se le radici complesse n-esime di -1 formano un gruppo moltiplicativo.

2. Stabilire se l'insieme $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{ esiste } n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0, \text{ tale che } z^n = 1\}$ forma un gruppo rispetto alla moltiplicazione usuale dei numeri complessi. In caso affermativo determinare l'inverso di un generico elemento.

3. In S_n, un ciclo di lunghezza dispari è una permutazione pari o dispari?
Determinare tutti gli elementi di S_4 che sono permutazioni pari e quelli che sono permutazioni dispari.

4. Si considerino le seguenti permutazioni di S_9

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 5 & 4 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 5 & 6 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 1 & 8 & 4 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 8 & 6 & 7 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ognuna di esse si calcolino:

(1) la decomposizione in cicli disgiunti e in prodotto di trasposizioni;
(2) l'ordine e la parità.

5. Dimostrare che in un gruppo finito ogni elemento ha ordine finito.

6. Sia $S = \{x \in \mathbb{Q}; 0 \leq x < 1\}$ e definiamo la somma di due elementi nel modo seguente:

$x \oplus y = x + y$ se $x + y < 1$

$x \oplus y = x + y - 1$ se $x + y \geq 1$.

Dimostrare che $(S, \oplus)$ è un gruppo.

7. Sia G un gruppo moltiplicativo e sia e il suo elemento neutro. Supponiamo che esista $n \geq 1$, tale che $x^n = e$. Dimostrare che esiste $m \geq 1$ tale che $x^{-1} = x^m$.