AL4 Istituzioni di Algebra Superiore (1^0 Modulo)

A.A. 1998/1999

Stefania Gabelli

Teoria di Galois I

1. Elementi di Teoria dei Campi

Campi e sottocampi. Il gruppo moltiplicativo di un campo. Caratteristica. Omomorfismi di campi.

Ampliamenti di campi. Ampliamenti semplici e finitamente generati.

Elementi algebrici e trascendenti. Il polinomio minimo di un elemento algebrico. Teorema di struttura degli ampliamenti semplici.

Il grado di un ampliamento. Ampliamenti finiti.

Costruzioni con riga e compasso. CNES per la costruibilità di un punto. Costruzioni impossibili.

Costruzione di radici. Ampliamenti semplici simbolici. Campi di spezzamento. Estensioni di omomorfismi di campi. Unicità del campo di spezzamento a meno di isomorfismi.

Campi finiti. Teorema di esistenza e unicità dei campi finiti. Polinomi irriducibili su $\mathbf{Z}_p$. Il gruppo degli automorfismi di un campo finito. I sottocampi di un campo finito.

Ampliamenti algebrici. Teorema di struttura degli ampliamenti algebrici finitamente generati. Esempi di ampliamenti algebrici non finiti.

Chiusura algebrica di un campo. Campi algebricamente chiusi. Esistenza e unicità della chiusura algebrica.

Dipendenza algebrica. Basi di trascendenza e grado di trascendenza. Ampliamenti puramente trascendenti. Teorema di struttura degli ampliamenti finitamente generati.

2. La corrispondenza di Galois

$\mathbf{F}$-automorfismi di un ampliamento di un campo $\mathbf{F}$. Campi intermedi e campi fissi.

Indipendenza lineare di omomorfismi di campi (Lemma di Dedekind). Limitazione per il grado di un campo fisso (Lemma di Artin). Ampliamenti di Galois.

Polinomi separabili. Esempi di polinomi irriducibili e inseparabili. Ampliamenti di Galois come campi di spezzamento di polinomi separabili. Teorema dell'elemento primitivo. Risolventi di Galois.

Radici n–esime dell'unità. Radici primitive. Polinomi ciclotomici su $\mathbf{Q}$ e loro irriducibilità. Ampliamenti ciclotomici. Il gruppo degli automorfismi di un ampliamento ciclotomico.

Richiami sui gruppi di permutazioni finiti. I gruppi di Galois come gruppi di permutazioni. Esempi di polinomi di grado primo p con gruppo di galois isomorfo a S_p.

Campi coniugati. Composto di campi. Chiusura normale di un campo intermedio di un ampliamnto di Galois. Il teorema fondamentale della corrispondenza di Galois. Calcolo esplicito di esempi.

Costruzione con riga e compasso dei poligoni regolari. Il teorema di Gauss.

Testi consigliati

[1] *Appunti del docente distribuiti a lezione*.
[2] I. Stewart, *Galois Theory*. Chapman and Hall, (1989).
[3] J. Rotman, *Galois Theory*. Universitext, Springer-Verlag, (1990).

Bibliografia supplementare

[4] M. H. Fenrick, *Introduction to the Galois Correspondence*. Birkäuser, (1992).
[5] M. Artin, *Algebra*. Bollati-Boringhieri, (1998).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	■ SI	□ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		□ SI	■ NO

L'esame consiste di due prove scritte da svolgersi in classe durante il corso e da un colloquio integrativo.

Nel caso in cui la media dei voti riportati nelle due prove scritte non superi la sufficienza è necessario sostenere una prova scritta finale.

Il colloquio integrativo consisterà nella discussione delle prove scritte e nell'esposizione di un argomento svolto nel corso.