

# GE450 Topologia Algebrica

A.A. 2011/2012

Lucia Caporaso

## 1. Omologia

Omotopia tra mappe, equivalenza omotopica di spazi topologici, spazi contraibili, retratti di deformazione. CW complessi e CW coppie. Grafi ed altri esempi di CW complessi; prodotti e quozienti. Gruppi Liberi come gruppi fondamentali di grafi.

Estensione dell'omotopia e retratti di deformazione. Invarianza del tipo di omotopia per quoziente modulo un sottospazio contraibile. Estensione dell'omotopia per CW coppie.

$K(G,1)$  spazi. Costruzione di un CW-complesso  $K(G,1)$  per un gruppo arbitrario  $G$ : spazio classificante  $BG$  e suo rivestimento universale. Esistenza di alberi massimali in grafi connessi arbitrari. Unicit  del tipo omotopico di un  $K(G,1)$ .

Richiami di omologia singolare. Omologia ridotta. Lemma del cinque. Omologia relativa. Successione esatta lunga di omologia associata ad una successione esatta corta di complessi. Successione esatta di omologia relativa. Suddivisioni baricentriche. Operatori di suddivisioni baricentriche e loro tipo d'omotopia per spazi convessi e spazi topologici arbitrari. Omologia calcolata rispetto a ricoprimenti attraverso gli operatori di suddivisioni baricentriche. Teorema di escissione e sue varianti del teorema di escissione. omologia delle sfere.

Successione esatta per una terna di spazi; successione esatta per spazi quozienti con propriet speciali.

Grado di un'applicazione continua della sfera in se stessa. Endomorfismi della sfera: mappa antipodale, mappe senza punti fissi. Campi vettoriali sulla sfera. Azione libera di un gruppo sulla sfera. Grado locale e grado globale.

Omologia cellulare. Omologia per lo spazio proiettivo complesso e le superfici compatte orientabili. Formula per il calcolo del bordo cellulare.

Omologia con coefficienti un gruppo abeliano. Omologia per lo spazio proiettivo reale sugli interi e con gruppo dei coefficienti un gruppo abeliano.

Caratteristica topologica di un CW- complesso e sua espressione omologica.

## 2. Coomologia

Successioni esatte spezzate. Successioni duali di successioni esatte. Coomologia di complessi in gruppi abeliani liberi a coefficienti arbitrari. Risoluzioni libere e coomologia per gruppi abeliani. Teorema dei coefficienti universali per la coomologia.

Gruppi Ext e loro proprietà semplici. Teorema dei coefficienti universali per la coomologia di spazi topologici: omologia e coomologia a coefficienti in un campo. Proprietà generali dei gruppi di coomologia: coomologia relativa, proprietà funtoriali, successione di Mayer-Vietoris.

Coomologia di grafi. Prodotto cup e anello di coomologia a coefficienti in un anello. Calcolo esplicito per la superficie compatta connessa orientabile di genere 2.

Esempi di anelli coomologia. Prodotto tensoriale di gruppi abeliani e di moduli. Prodotto di spazi topologici.

Definizione di categoria, funtore covariante e funtore contravariante; funtori di omologia e coomologia. Definizione assiomatica dell'omologia: teorie omologiche ridotte e non ridotte dalla categoria delle CW-coppie alla categoria dei gruppi abeliani; esempi.

Definizione assiomatica della coomologia: teorie coomologiche non ridotte dalla categoria delle CW-coppie alla categoria dei gruppi abeliani. Caratterizzazione di una teoria coomologica a meno di trasformazioni naturali.

Formula di Kunneth per CW-complessi.

Orientazioni locali e globali: definizione tramite l'omologia singolare. Caratterizzazioni dell'orientabilità tramite rivestimenti a due fogli. Orientazioni su anelli arbitrari. Caratterizzazioni omologiche di spazi orientabili.

Dualità di Poincaré.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] A. HATCHER, *Algebraic topology*. Cambridge University press, (2001).  
[2] M.J. GREENBERG-J. HARPER , *Algebraic topology (A first course)*. Addison-Wesley publishing company, (1981).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO