

AM310 Istituzioni di Analisi superiore

A.A. 2011/2012

Gianni Mancini

Teoria della misura e spazi funzionali

1. Misure e funzioni misurabili

Misure (esterne), la misura di Lebesgue in R^n , misure di Hausdorff, invarianza per traslazione, omogeneità. Misurabilità secondo Caratheodori, la σ -algebra dei misurabili, numerabile additività. Misura dell'unione crescente, dell'intersezione decrescente. Misure metriche, misure boreliane. Regolarità di una misura. La misura di Lebesgue in R^n è Borel regolare, approssimazione mediante aperti, compatti. Insieme di Cantor, funzione di Cantor. Un esempio di insieme in R non misurabile secondo Lebesgue.

Funzioni misurabili. Funzioni semplici misurabili, rappresentazione di una funzione misurabile $f \geq 0 : \exists E_j$ misurabili tali che $f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} \chi_{E_j}$.

2. Integrazione

Integrale di una funzione semplice, di funzioni misurabili, sommabilità. Linearità, positività dell'integrale, prime disuguaglianze integrali. Il teorema di Beppo Levi, il lemma di Fatou, il teorema di Lebesgue, o della convergenza dominata. Numerabile additività, assoluta continuità dell'integrale. Convergenza in media, le successioni di Cauchy convergono in media. Convergenza in media e convergenza quasi ovunque. Convergenza in misura e relazioni tra i diversi tipi di convergenza. Il teorema di Vitali. Misura prodotto ed i Teoremi di Fubini e di Fubini-Tonelli.

3. Principi dell'Analisi Funzionale Lineare

Spazi di Hilbert. Proiezione ortogonale in un Hilbert, il Teorema di rappresentazione di Riesz. Disuguaglianza di Bessel, basi ortonormali e loro caratterizzazioni, identità di Parseval. Convergenza debole, semicontinuità inferiore debole della norma. Le successioni debolmente convergenti sono limitate, le successioni limitate hanno sottosuccessioni debolmente convergenti. Il Lemma di Masur.

Spazi normati, di Banach. Il teorema di Hahn-Banach, teoremi di separazione. Il Lemma di Baire ed i teoremi di Banach-Steinhaus, della mappa aperta, del grafico chiuso. Compattezza in spazi di Banach, il Teorema di Ascoli-Arzelá, il Lemma di Riesz. Convergenza debole, debole* e Teorema di Banach-Alaoglu, riflessività, compattezza debole delle successioni limitate.

Spettro di un operatore lineare, autovalori, autofunzioni. Operatori lineari compatti, alternativa di Fredholm. Spettro di un operatore lineare compatto, il caso autoaggiunto, decomposizione spettrale.

4. Spazi L^p .

Le diseguaglianze di Holder e di Minkowski, completezza di L^p . Diseguaglianza di Holder generalizzata, una diseguaglianza di interpolazione. Le funzioni semplici sommabili sono dense in L^p . L^2 è uno spazio di Hilbert, serie di Fourier per funzioni L^2 .

Convergenza debole in spazi $L^p, p > 1$, semicontinuit  inferiore debole della norma. Le successioni debolmente convergenti sono limitate. Diseguaglianza di Hanner (uniforme convessit ). Proiezione su di un sottoinsieme chiuso e convesso. Funzionali lineari e continui su L^p , il duale di $L^p, p > 1$   isometricamente isomorfo a L^q ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Le successioni limitate in $L^p, p > 1$ hanno sottosuccessioni debolmente convergenti. Il Lemma di Masur.

Lo spazio L^∞ , completezza. Il Teorema della media. Se μ   σ -finita L^∞   isometricamente isomorfo al duale di L^1 . Funzionali lineari e continui su L^∞ che non si rappresentano con funzioni L^1 . Separabilit  di L^p (ma non di L^∞). Convergenza debole in L^1 , successioni limitate in L^1 che non hanno estratte debolmente convergenti. Convergenza debole* in L^∞ , compattezza debole*.

Funzionali lineari continui su L^∞ e misure. Misure assolutamente continue. Il Teorema di Radon Nikodym. Caratterizzazione dei funzionali lineari e continui su L^∞ che si rappresentano mediante funzioni L^1 in termini di continuit  (sequenziale) debole*. Misure singolari e Teorema di decomposizione di Lebesgue.

5. Misura ed integrale di Lebesgue, di Hausdorff, in R^n

Invarianza per traslazione, riflessione, della misura di Lebesgue, N-omogeneit . Propriet  di regolarit : $L^n(E) = \inf\{L^n(O) : E \subset O, O \text{ aperto}\}$, $L^n(E) = \sup\{L^n(K) : K \subset E, K \text{ compatto}\}$. Approssimazione in media di funzioni caratteristiche misurabili mediante funzioni continue a supporto compatto. Le funzioni continue a supporto compatto sono dense in $L^1(R^n)$. Invarianza per traslazione dell'integrale di Lebesgue, le traslazioni agiscono in modo continuo su L^p . Convoluzione di funzioni $L^1, L^p - L^q$, la diseguaglianza di Young. Nuclei regolarizzanti, densit  di C_0^∞ in L^p , ancora sulla separabilit  di L^p .

Compattezza in L^p , il teorema di Frechet-Kolmogoroff.

Il Lemma di ricoprimento di Vitali. Diseguaglianza isodiametrica, $H^N = L^N$. Formule di Area e di Coarea.

Simmetrizzazione di Schwartz, di Steiner, diseguaglianza di Riesz.

Il teorema di differenziazione di Lebesgue-Besicovitch. Derivata di Radon-Nykodim. Funzione di distribuzione di una misura in R , differenziabilit  q.o. Misure di Lebesgue-Stiltjes, derivabilit  q.o. delle funzioni monotone. Funzioni assolutamente continue e formula di Torricelli-Newton.

6. Diseguaglianze di Sobolev

La diseguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev. Diseguaglianze di Sobolev , Morrey, Poincaré. Convoluzione con la soluzione fondamentale, soluzioni dell'equazione di Poisson in R^N con dato in $L^p, p < N/2$. Teorema di compattezza di Rellich.

Derivate deboli, gli spazi $H^{1,p}(R^N), H_0^1(\Omega)$. Soluzioni deboli del problema di Dirichlet in aperti limitati, unicità e dipendenza continua dal dato.

Lemma di Weil e proprietà di regolarità.

TESTI CONSIGLIATI

- [1] EVANS-GARIEPY, *Measure theory and fine properties of functions.* , ().
[2] W. RUDIN, *Analisi reale e complessa.* Boringhieri, ().
[3] LIEB-LOSS, *Analysis.* AMS, ().
[4] H. BREZIS, *Analisi Funzionale.* Liguori, ().
[5] , .

BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [6] , . , ().
[7] , . , ().

MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO