

# TE1 Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois

## A.A. 2008/2009

### Prof. Stefania Gabelli

#### 1. Elementi di Teoria dei Campi

Campi e sottocampi. Caratteristica. Omomorfismi di campi.

Ampliamenti di campi. Ampliamenti semplici e finitamente generati. Il composto di due campi.

Elementi algebrici e trascendenti. Il polinomio minimo di un elemento algebrico. Ampliamenti semplici.

Il grado di un ampliamento. Ampliamenti quadratici e biquadratici. Ampliamenti finiti.

Radici  $n$ -sime dell'unità. Radici primitive. Polinomi ciclotomici su  $Q$  e loro irriducibilità. Ampliamenti ciclotomici.

Costruzioni di radici e campi di spezzamento.  $F$ -isomorfismi. Unicità del campo di spezzamento.

Campi finiti: esistenza ed unicità. Polinomi irriducibili su campi finiti.

Ampliamenti algebrici. Ampliamenti algebrici finitamente generati. Il teorema dell'elemento primitivo. Esempi di ampliamenti algebrici non finiti.

Chiusura algebrica e campi algebricamente chiusi.

Elementi coniugati e campi coniugati. Chiusura normale e ampliamenti normali.

Cenni sugli ampliamenti separabili. Ampliamenti di Galois finiti.

#### 2. La corrispondenza di Galois

Il gruppo di Galois di un ampliamento di campi. Il gruppo di Galois di un polinomio.

Il gruppo di Galois di un polinomio come gruppo di permutazioni: polinomi di terzo grado e polinomi biquadratici. Esempi di polinomi di grado primo  $p$  con gruppo di Galois isomorfo a  $S_p$ .

Il gruppo di Galois di un ampliamento ciclotomico.

Campi intermedi e campi fissi.

Il Teorema Fondamentale della corrispondenza di Galois. Calcolo esplicito di esempi nel caso numerico.

La corrispondenza di Galois per alcuni ampliamenti ciclotomici. Sottocampi reali di ampliamenti ciclotomici. Costruzione di polinomi con tutte radici reali. Costruzione di polinomi con gruppo di Galois ciclico.

### 3. Alcune applicazioni della corrispondenza di Galois

Il problema della risolubilità per radicali di un'equazione polinomiale. Il lemma di Dedekind. Ampliamenti ciclici. Ampliamenti radicali. Cenni sui gruppi risolubili: esempi.

Il teorema di Galois sulla risolubilità delle equazioni polinomiali. Polinomi e funzioni simmetriche: il teorema fondamentale. Il polinomio generale e il suo gruppo di Galois. Relazioni fra le radici ed i coefficienti di un polinomio. Il discriminante di un polinomio. Formule per il calcolo del discriminante. Il discriminante del  $p$ -simo ampliamento ciclotomico. Ogni ampliamento quadratico è contenuto in un ampliamento ciclotomico.

Il Teorema di Ruffini-Abel. Esempi di equazioni di quinto grado non risolubili per radicali.

Le formule di Cardano per le soluzioni di un'equazione di terzo grado. Discussione delle radici reali in base al segno del discriminante.

Costruzioni con riga e compasso. CNES per la costruibilità di un punto. Costruzioni impossibili. Costruzione dei poligoni regolari: il teorema di Gauss (cenni di dimostrazione).

### 4. Argomenti facoltativi

Una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.

Gruppi di Galois di equazioni di quarto grado.

Il teorema di Gauss sulla costruibilità dei poligoni regolari.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] S. GABELLI, *Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois*. Springer Italia, Unitext 38, (2008).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [2] C. PROCESI, *Elementi di Teoria di Galois*. Decibel, Zanichelli, (Seconda ristampa, 1991).  
 [3] I. STEWART, *Galois Theory*. Chapman and Hall, (1989).  
 [4] J. ROTMAN, *Galois Theory*. Universitext, Springer-Verlag, (1990).  
 [5] M. ARTIN, *Algebra*. Bollati-Boringhieri, (1998).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO

L'esame consiste di due prove scritte da svolgersi in classe durante il corso e da un colloquio integrativo.

Nel caso in cui la media dei voti riportati nelle due prove scritte non raggiunga la sufficienza è necessario sostenere una prova scritta finale.