FM3 Meccanica lagrangiana ed hamiltoniana
A.A. 2007/2008

Guido Gentile

1. Vincoli

Gradi di libertà e sistemi vincolati. Vincoli olonomi e anolonomi. Vincoli indipendenti e regolari. Superficie di vincolo. Traiettorie virtuali. Principio di d'Alembert. Vincoli di mobilità e vincoli anolonomi integrabili. Forze vincolari. Richiami sui sistemi rigidi e sull'operatore d'inerzia.

2. Meccanica lagrangiana

Sistemi lagrangiani. Equazioni di Eulero-Lagrange. Primo principio variazionale di Hamilton (principio di minima azione): equivalenza tra equazione di Newton ed equazioni di Eulero-Lagrange. Problemi di esistenza e unicità per problemi con condizioni al contorno. Formalismo lagrangiano per moti su varietà. Coordinate generalizzate e lagrangiana vincolata. Formalismo lagrangiano per sistemi vincolati: equivalenza tra equazione di Newton supplementata dal principio di d'Alembert ed equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi vincolati. Calcolo delle forze vincolari. Alcuni esempi notevoli di sistemi lagrangiani.

3. Studio dei sistemi lagrangiani

Sistemi indipendenti dal tempo. Energia. Configurazioni d'equilibrio: studio della stabilità. Teorema di Dirichlet. Variabile cicliche e momenti conservati. Metodo di Routh e lagrangiana ridotta. Applicazione al problema dei due corpi.

4. Simmetrie e costanti del moto

Gruppi a un parametro di diffeomorfismi. Trasformazioni di coordinate e loro sollevamenti. Campi vettoriali, momenti conservati e momenti coniugati. Gruppi di simmetrie a un parametro: teorema di Noether. Richiami sul teorema della scatola di flusso. Teorema di Frobenius. Gruppi di simmetrie a più parametri: teorema di Noether nel caso di gruppi di simmetrie a più parametri.

5. Teoria delle piccole oscillazioni

Linearizzazione. Lagrangiana quadratica. Piccole oscillazioni e oscillazioni proprie. Frequenze normali ed equazione caratteristica. Pendoli identici accoppiati. Battimenti. Pendoli accoppiati con masse e lunghezze diverse. Rigidità. Piccole oscillazioni per sistemi vincolati. Teorema di Rayleigh-Courant-Fisher.

6. Meccanica hamiltoniana

Spazio dele fasi. Trasformate di Legendre. Equazioni di Hamilton. Secondo principio variazionale di Hamilton. Campo vettoriale hamiltoniano. Campi a divergenza nulla. Teorema di Liouville. Teorema del ritorno di Poincaré.

7. Trasformazioni canoniche

Trasformazioni di coordinate nello spazio delle fasi. Matrici simplettiche. Determinante delle matrici simplettiche. Trasformazioni che conservano la struttura canonica. Trasformazioni canoniche e trasformazioni simplettiche. Trasformazioni indipendenti e dipendenti dal tempo. Parentesi di Poisson e loro proprietà: bilinearità, antisimmetria e identità di Jacobi. Parentesi di Poisson fondamentali e integrali primi. Caratterizzazione delle trasformazioni canoniche in termini delle parentesi di Poisson. Richiami sulle forme differenziali e sul teorema di Stokes. Matrici antisimmetriche non singolari e direzione di rotore. Invariante integrale di Poincaré-Cartan. Differenziale a tempo bloccato. Condizione di Lie.

8. Funzioni generatrici e metodo di Hamilton-Jacobi

Funzioni generatrici indipendenti e dipendenti dal tempo. Funzioni generatrici di prima e seconda specie. Funzione generatrice dell'identità. Estensione di un cambiamento di coordinate a una trasformazione simplettica nello spazio delle fasi. Equazione di Hamilton-Jacobi. Integrale generale e integrale completo. Funzione principale di Hamilton. Funzione caratteristica di Hamilton. Sistemi unidimensionali e problemi di non località. Sistemi separabili.

9. Variabili azione-angolo

Variabili azione-angolo. Sistemi unidimensionali. Sistemi a più dimensioni: teorema di Liouville-Arnol'd (solo enunciato). Caso dei sistemi separabili. Dimostrazione del teorema di Liouville-Arnol'd per sistemi separabili. Sistemi completamente integrabili.

10. Cenni di teoria delle perturbazioni

Tori invarianti. Vettori diofantei. Sistemi quasi-integrabili. Equazione di Hamilton-Jacobi e serie perturbative. Analisi a tutti gli ordini. Problemi di convergenza delle serie. Serie di Birhoff. Divergenza delle serie di Birkhoff. Enunciato del teorema KAM.

Testi consigliati

[1] G. Dell'Antonio, *Elementi di Meccanica*. Liguori Editore, (1996).

[2] A. Fasano & S. Marmi, *Meccanica analitica*. Bollati Boringhieri, (1994).

[3] G. Gentile, Introduzione ai sistemi dinamici. 1. Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni.
Disponibile in rete: http://www.mat.uniroma3.it, (2006).

[4] G. Gentile, Introduzione ai sistemi dinamici. 2. Meccaqnica lagrangiana e hamiltoniana. Disponibile in rete: http://www.mat.uniroma3.it, (2006).

Bibliografia supplementare

[5] V.I. Arnol'd, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*. Editori Riuniti, (1979).

[6] L. Benfatto, R. Raimondi, E. Scoppola, Meccanica hamiltoniana. Disponibile in rete: http://www.mat.uniroma3.it,

[7] G. Gallavotti, *Meccanica Elementare*. Bollati-Boringhieri, (1980).

[8] L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Meccanica*. Editori Riuniti, (1976).

[9] T. Levi-Civita & U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Elementare*. Zanichelli, (1947).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		☐ SI	■ NO
- esame finale	scritto	☐ SI	■ NO
	orale	■ SI	☐ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		■ SI	☐ NO

L'esame consiste in un colloquio orale, in cui si presentano e discutono argomenti del programma ed esercizi svolti durante lo svolgimento del corso.