

# FM1 Equazioni differenziali e Meccanica

A.A. 2005/2006

Guido Gentile

## 1. Operatori lineari

Spazi vettoriali e operatori lineari: richiami. Somma diretta. Spettro di un operatore lineare. Complessificazione e decomplessificazione di uno spazio vettoriale e di un operatore lineare. Operatori lineari diagonalizzabili e non diagonalizzabili. Operatori lineari semisemplici e operatori lineari nilpotenti. Autospazi generalizzati e teorema di decomposizione spettrale (senza dimostrazione). Esponenziale di un operatore lineare.

## 2. Equazioni differenziali lineari

Sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti (omogenee e non omogenee). Teorema di esistenza e unicità globale della soluzione. Equazioni differenziali lineari di ordine qualsiasi a coefficienti costanti. Ricerca delle soluzioni nella forma di polinomi pesati con fattori esponenziali. Sistemi planari lineari. Oscillatore armonico e oscillatore armonico smorzato. Metodo di variazione delle costanti.

## 3. Equazioni differenziali ordinarie: teoria generale

Definizione di sistema dinamico. Flusso di un sistema dinamico. Sistemi autonomi e non autonomi. Funzioni lipschitziane, funzioni di classe  $C^1$  e successioni di funzioni uniformemente convergenti: richiami. Problema di Cauchy. Lemma di Gronwall. Teorema di esistenza e unicità locale per sistemi dinamici di classe  $C^1$ : metodo di iterazione di Picard, esempi e controesempi, applicazione ai sistemi lineari. Teorema della dipendenza continua dai dati iniziali. Prolungamento di una soluzione e soluzione massimale. Teorema del prolungamento della soluzione. Teorema della dipendenza differenziabile dai dati iniziali (solo enunciato). Equazioni a variabili separabili.

## 4. Analisi qualitativa del moto: teoria generale

Stabilità secondo Ljapunov. Punti di equilibrio stabile, asintoticamente stabile, attrattivo e instabile. Bacino d'attrazione. Insiemi limite. Sistemi dinamici linearizzati. Stabilità di un punto d'equilibrio nel caso in cui la matrice corrispondente al sistema linearizzato abbia tutti gli autovalori con parte reale strettamente negativa. Instabilità di un punto d'equilibrio nel caso in cui la matrice corrispondente al sistema linearizzato

abbia almeno un autovalore con parte reale strettamente positiva (solo enunciato). Teorema di stabilità di Ljapunov. Teorema di stabilità di Barbašin-Krasovskij. Pendolo con attrito. Sistemi meccanici conservativi. Teorema di Dirichlet sulla stabilità dei sistemi meccanici conservativi. Cicli limite. Traiettorie periodiche. Comportamento di un sistema dinamico lontano dai punti d'equilibrio: teorema della scatola di flusso.

### **5. Alcuni esempi di analisi qualitativa del moto**

Sistemi planari. Teorema di Poincaré-Bendixson (solo enunciato). Sistemi che ammettono una costante del moto: curve di livello e studio qualitativo delle traiettorie. Soluzioni periodiche e soluzioni asintotiche: traiettorie omocline ed eterocline. Sistemi gradiente: proprietà e analisi qualitativa.

### **6. Analisi qualitativa per sistemi unidimensionali**

Sistemi meccanici conservativi: conservazione dell'energia e curve di livello. Studio dell'energia potenziale. Orbite chiuse e traiettorie periodiche. Moti asintotici. Stabilità dei punti d'equilibrio e punti critici del potenziale. Tempi di percorrenza delle orbite e stime di periodi.

### **7. Moti centrali**

Forze centrali. Problema dei due corpi. Campo centrale armonico e campo centrale coulombiano. Leggi di Keplero. Moti centrali: condizioni di periodicità per il moto. Teorema di Bertrand (solo enunciato).

### **8. Moti relativi**

Moto in un sistema di coordinate mobili. Cambiamento di sistemi di riferimento. Trasformazioni rigide, traslazioni e rotazioni. Velocità angolare. Forze d'inerzia: forza inerziale di traslazione, forza inerziale di rotazione, forza centrifuga e forza di Coriolis. Teorema di Coriolis. Pendolo di Foucault e altri esempi.

### **9. Sistemi rigidi**

Sistemi rigidi. Spazio delle configurazioni dei sistemi rigidi. Caratteristiche cinematiche dei sistemi rigidi: energia cinetica e momento angolare. Teorema di König. Caratteristiche dinamiche dei sistemi rigidi: equazioni cardinali della dinamica. Momenti d'inerzia. Operatore d'inerzia: assi d'inerzia e momenti principali d'inerzia. Momento d'inerzia rispetto a un asse fissato. Teorema di Huygens-Steiner. Calcolo dei momenti principali d'inerzia in alcuni sistemi semplici: sbarra, anello, disco, cilindro, sfera.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] V.I. ARNOL'D, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*. Editori Riuniti, (1979).
- [2] G. DELL'ANTONIO, *Elementi di Meccanica*. Liguori Editore, (1996).
- [3] G. GENTILE, *Introduzione ai sistemi dinamici. 1. Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni*. Disponibile in rete: <http://www.mat.uniroma3.it>, (2006).
- [4] M.W. HIRSCH & S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, (1974).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [5] V.I. ARNOL'D, *Équations différentielles ordinaires*. Éditions MIR, (1974).
- [6] G. GALLAVOTTI, *Meccanica Elementare*. Bollati-Boringhieri, (1980).
- [7] L.D. LANDAU & E.M. LIFSHITZ, *Meccanica*. Editori Riuniti, (1976).
- [8] T. LEVI-CIVITA & U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Elementare*. Zanichelli, (1947).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto <input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale <input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

L'esame consiste in una prova scritta, comprendente anche domande di tipo teorico ed eventualmente sostituita da prove di valutazione parziale (“esoneri”) durante lo svolgimento del corso, e in un colloquio orale facoltativo.