# AN2 Analisi Numerica 2

## A.A. 2005/2006

**Prof. Renato Spigler**

### 1. Risoluzione numerica di sistemi di equazioni non lineari

Breve richiamo al caso dei sistemi lineari (metodi diretti e metodi iterativi), e al caso di una singola equazione non lineare (in particolare metodo di Newton).

Il metodo di Newton per sistemi di $n$ equazioni non lineari in altrettante incognite. Teorema della convergenza locale del metodo di Newton.

Metodi di Newton modificati: (1) valutazione ciclica della matrice Jacobiana; (2) risoluzione inesatta mediante metodi iterativi; (3) approssimazione delle derivate parziali nella matrice Jacobiana mediante rapporti incrementali. Metodi di tipo secante, in analogia al caso di una singola equazione.

Il teorema di punto fisso di Banach e le sue implicazioni per gli algoritmi numerici. Il metodo di Newton come metodo di punto fisso.

### 2. Ottimizzazione non vincolata

Ricerca del minimo di funzionali quadratici, equivalente alla risoluzione di un sistema lineare ad esso connesso.

Metodi iterativi per la ricerca del minimo di cui sopra. Metodi di discesa: metodi di Newton, di Newton inesatti, della piu' ripida discesa (steepest descent) ossia del gradiente, e del gradiente coniugato. Scelta del parametro ottimale nel metodo della discesa, errore nella norma dell'energia, in particolare nel caso speciale della piu' ripida discesa. Interpretazione geometrica del metodo del gradiente in due dimensioni.

Metodo del gradiente coniugato come metodo semi-iterativo (in aritmetica esatta termina in un numero finito di passi, ma in aritmetica finita deve essere utilizzato come metodo iterativo). Numero di iterazioni richieste per terminare con un dato errore. Precondizionamento e algoritmo del gradiente coniugato precondizionato. Precondizionamento mediante "fattorizzazione di Choleski incompleta". Cenno al caso di matrici del sistema non simmetriche (metodo della matrice normale).

### 3. Trattamento numerico di equazioni differenziali ordinarie

Richiami sui teoremi di esistenza e unicita' "in piccolo" e "in grande" per il problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie (senza dimostrazione). Stabilita' totale o "secondo Liapunov" con l'uso del Lemma di Grownwall (dimostrato).

Discretizzazione mediante metodi espliciti o impliciti, ad un passo. Metodi: (1) di Eulero in avanti (o esplicito); (2) di Eulero all'indietro (o implicito); (3) dei trapezi (o di Crank-Nicolson); (4) di Heun.

Definizione di errore di troncamento locale e globale. Consistenza di un dato metodo numerico. "Zero stabilita' " di un dato schema numerico e sua dimostrazione per metodi espliciti ad un passo con funzione di incremento Lipschitziana rispetto ad $y$. Uso del Lemma di Gronwall discreto (senza dimostrazione).

Definizione di convergenza e caso degli schemi precedenti. Dimostrazione diretta (senza servirsi del Lemma di Gronwall) della convergenza del metodo di Eulero in avanti, sia in aritmetica esatta che tenendo conto di errori di arrotondamento. Compromesso tra errori di arrotondamento e di troncamento (scelta di un passo ottimale).

Definizione di "stabilita' assoluta" (e quindi di A-stabilita') e di regioni di stabilita' assoluta. Stabilita' assoluta condizionata e incondizionata. Caso dei metodi di Eulero in avanti e all'indietro, di Heun e dei trapezi. Cenno al caso della stabilita' assoluta per sistemi di equazioni differenziali del primo ordine.

Equazioni alle differenze lineari: esempio con i numeri di Fibonacci, equazioni omogenee, polinomio caratteristico, soluzioni fondamentali anche nel caso di equazione caratteristiche con radici multiple, equazioni non omogenee.

Richiamo sulle equazioni differenziali lineari di ordine $n$. Il Wronskiano e la sua relazione con la dipendenza e indipendenza lineare di soluzioni dell'equazione omogenea. Spazio vettoriale delle soluzioni e sua dimensione. Rappresentazione del Wronskiano (teorema di Liouville). Cenno al caso dell'equazione non omogenea corrispondente.

Analogie col caso delle equazioni alle differenze lineari: Casoratiano (o determinante di Casorati) e sua relazione con la dipendenza e indipendenza lineare delle soluzioni.

Metodi a piu' passi per la risoluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie. Il metodo del punto medio (a due passi, esplicito), il metodo di Simpson (a due passi, implicito). Definizione di errore di troncamento e di consistenza per tali metodi. Dimostrazione della consistenza di metodi a piu' passi, quando sono soddisfatte opportune condizioni algebriche sui parametri. "Condizioni sulle radici", zero stabilita' e convergenza. Stabilita' asoluta. I metodi di Adams (espliciti o di Adams-Bashforth) e quelli impliciti (o di Adams-Moulton), e i metodi BDF (backward differentiation formulae). Metodi "predictor-corrector".

Metodi di Runge-Kutta come metodi alternativi ai multistep per ottenere una elevata accuratezza. Matrice di Butcher. Metodi di Runge-Kutta espliciti e impliciti.

## 4. Elementi di MATLAB

Conoscenza operativa del linguaggio di programmazione MATLAB.

# Testi consigliati

[1] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Matematica Numerica*. Springer-Verlag Italia, (1998).

[2] V. Comincioli, Analisi Numerica. Metodi Modelli Applicazioni. McGraw-Hill Libri Italia, (1990).

[3] G. Ciaburro, Manuale MATLAB. http://www.ciaburro.it, (1990).

# Bibliografia supplementare

[4] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical Mathematics*. Springer, (2000).

# Modalità d'esame

| | | | |
|---|---|---|---|
| - valutazione in itinere ("esoneri") | | ☐ SI | ■ NO |
| - esame finale | scritto | ■ SI | ☐ NO |
| | orale | ☐ SI | ■ NO |
| - altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto) | | ☐ SI | ■ NO |