

# AL4 Numeri Algebrici

A.A. 2004/2005

Prof. Stefania Gabelli

Numeri algebrici. Ampliamenti algebrici semplici di un campo numerico. Ampliamenti quadratici. Ampliamenti ciclotomici. Ampliamenti finitamente generati. Il Teorema dell'Elemento Primitivo. Elementi coniugati. Isomorfismi in  $C$ .

Cenni sui polinomi simmetrici. Discriminante di un polinomio. Discriminante di una base di un campo numerico.

Interi algebrici. Definizioni equivalenti. L'anello degli interi di un campo quadratico. L'anello degli interi del  $p$ -esimo ampliamento ciclotomico. Norma e Traccia di un numero algebrico.

Gruppi abeliani liberi di rango finito. Basi intere. Esistenza di basi intere. Il discriminante assoluto di un campo numerico. Una formula per il calcolo del discriminante. Il discriminante di un ampliamento quadratico. Il discriminante del  $p$ -simo ampliamento ciclotomico.

Sottogruppi e quozienti di gruppi abeliani liberi di rango finito. Un algoritmo per la ricerca di basi intere.

Proprietà aritmetiche di un dominio. Domini euclidei, principali, di Bezout, a fattorizzazione unica, con massimo comune divisore. Il caso noetheriano.

Proprietà aritmetiche di anelli di interi quadratici. Interi di Gauss: norma, coniugio, algoritmo euclideo, elementi primi, elementi invertibili e relazione di associazione.

Domini di Dedekind: definizione e proprietà moltiplicative degli ideali. Gli anelli di interi algebrici sono domini di Dedekind.

Fattorizzazione di interi algebrici in elementi irriducibili. Il gruppo delle unità di un anello di interi quadratici. Enunciato del teorema delle unit di Dirichlet.

Norma di un ideale: definizioni equivalenti e prime proprietà. La norma di un ideale primo. Esistono un numero finito di ideali con norma fissata. Ogni ideale è contenuto in un numero finito di ideali (primi).

In un anello di interi algebrici ogni ideale non nullo è invertibile ed ogni ideale proprio è prodotto di ideali primi univocamente determinati. La norma è una funzione moltiplicativa.

Il problema della ramificazione: caso degli interi quadratici. Esempi di primi inerti, ramificati e decomposti. Cenni sulle congruenze quadratiche: il simbolo di Legendre.

Condizioni equivalenti affinché un anello di interi quadratici sia principale o euclideo. Come effettuare la divisione euclidea (quando possibile).

Il gruppo delle classi di un dominio di Dedekind. Finitezza del gruppo delle classi di un anello di interi algebrici. Calcolo di esempi. Il Teorema di Fermat per i primi

regolari (cenni di dimostrazione).

### **Approfondimenti Facoltativi**

Funzioni simmetriche.

Anelli Noetheriani.

Chiusura integrale.

Domini di Dedekind.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] H. POLLARD - H. G. DIAMOND, *The Theory of Algebraic Numbers*. Carus Math. Monographs, AMS, (1974).
- [2] I. N. STEWART - D. O. TALL, *Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem*. A. K. Peters Ltd, (2002).
- [3] S. GABELLI - F. GIROLAMI, *Anelli di Polinomi*. Dispense ciclostilate, (2004).
- [4] S. GABELLI, *Elementi di Teoria dei Campi*. Dispense in rete, (2005).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

Gli studenti che hanno sostenuto con esito positivo le prove di valutazione parziale (esoneri e seminari) accedono direttamente al colloquio orale, da effettuarsi durante l'Appello **A** o **B** ).

Gli studenti che non hanno frequentato il corso debbono prenotarsi almeno 10 giorni prima dell'appello d'esame, contattando il docente nell'orario di ricevimento.