

# AL3 Fondamenti di Algebra Commutativa

A.A. 2004/2005

Prof. Florida Girolami

## 1. Moduli

Moduli e sottomoduli. Operazioni tra sottomoduli. Omomorfismi e moduli quoziente. Generatori e basi. Prodotti diretti e somme dirette esterne di moduli. Proprietà universali. Somme dirette interne. Moduli liberi. Caratterizzazioni dei moduli liberi. Moduli di torsione. Omomorfismi di moduli liberi. Invarianza della dimensione di un modulo libero. Anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano. Algebre. Algebre finite e finitamente generate.  $\text{End}_R(M)$ . Anelli di matrici su un anello commutativo. Il "determinant trick". Il Teorema di Cayley-Hamilton. Successioni esatte e successioni esatte corte. Risoluzioni libere (cenni).

## 2. Ideali

Operazioni tra ideali. Omomorfismi di anelli e anelli quoziente. Il Lemma di Zorn. Ideali primi e massimali. Sottoinsiemi moltiplicativamente chiusi. Sottoinsiemi moltiplicativamente chiusi saturati. Teorema di Krull. L'insieme degli zero-divisori è una unione di ideali primi. Ideali primi minimali. Ideali coprimi. Il Teorema Cinese per gli anelli. Il "Prime Avoidance Theorem". Radicale di un ideale. Nilradicale e radicale di Jacobson. Anelli locali.

## 3. Anelli di Frazioni

Anelli e moduli di frazioni. Anello totale delle frazioni. Localizzazione. Esattezza della localizzazione. Proprietà locali. Estensione e contrazione di ideali. Ideali primi e primari in anelli di frazioni.

## 4. Anelli e Moduli Noetheriani

Condizione della catena ascendente e proprietà equivalenti. Condizione della catena discendente e proprietà equivalente. Moduli e anelli Noetheriani e Artiniani. Il Teorema di Cohen. Passaggio della Noetherianità ai quozienti e agli anelli di frazioni. Moduli e algebre su anelli noetheriani. Il Teorema della Base di Hilbert. Decomposizione primaria di ideali. Primi associati. Componenti isolate e componenti immerse. Teoremi di unicità. Decomposizione primaria in anelli Noetheriani. Il Lemma di Nakayama. Il Teorema dell'Intersezione di Krull.

## 5. Dipendenza Integrale

Dipendenza Integrale: condizioni equivalenti. Transitività della dipendenza integrale. Chiusura integrale e sue proprietà: comportamento nel passaggio ai quozienti e agli anelli di frazioni. Dimensione della chiusura integrale: Lying over, Incomparabilità, Going up, Going down. Enunciato del Lemma di Normalizzazione di Noether. Cenni sulle varietà algebriche affini. The weak Nullstellensatz.

## 6. Anelli di Valutazione

Domini di valutazione; esempi e loro prime proprietà. Il Teorema di Krull sulla chiusura integrale. Domini di valutazione discreta. Valutazioni discrete e valutazioni  $p$ -adiche. Caratterizzazione dei domini di valutazione discreta tra i domini di valutazione. Caratterizzazione dei domini di valutazione discreta tra i domini di integrità.

## 7. Domini di Prüfer e di Dedekind

Ideali frazionari. Ideali frazionari invertibili. Domini di Prüfer e loro caratterizzazioni. Sovraanelli di domini di Prüfer. Domini di Dedekind e loro caratterizzazioni. Fattorizzazione degli ideali nei domini di Dedekind.

## 8. Anelli Artiniani

Teorema di Jordan-Hölder. Serie di composizione. Lunghezza di un modulo. Anelli Artiniani. Prime proprietà degli anelli Artiniani. Il Teorema di Struttura.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] M. F. ATIYAH, I. G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, (1969).
- [2] I. KAPLANSKY, *Commutative Rings*. Polygonal, (1994).
- [3] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, (1994).
- [4] R. Y. SHARP, *Steps in Commutative Algebra*. London Mathematical Society Student Texts, 51, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto <input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
	orale <input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

L'esame consiste in un colloquio orale, volto ad accertare l'acquisizione da parte dello studente dei concetti e dei metodi illustrati nel corso.