AL1 Algebra 1, fondamenti
A.A. 2002/2003

Prof. Marco Fontana

1. Insiemi ed applicazioni

Nozione intuitiva di insieme. Operazioni tra insiemi (unione, intersezione, differenza, complementare) e loro proprietà. Differenza simmetrica di due insiemi. Insieme delle parti. Esempi.

Elementi di logica elementare. Tabelle della verità. Negazioni e quantificatori universali. Vari tipi di dimostrazione per assurdo.

Prodotto cartesiano di insiemi. Corrispondenze, relazioni e applicazioni. Corrispondenza inversa di una applicazione. Applicazione identica ed applicazioni costanti. Esempi. Prodotto operatorio di applicazioni e sue prime proprietà. Applicazioni iniettive, suriettive e biiettive; loro caratterizzazioni. Applicazioni tra insiemi finiti. Biiezione tra l'insieme delle parti di un insieme X con l'insieme $\{0,1\}^X$. Esempi.

Ricoprimenti e partizioni. Relazioni d'equivalenza e partizioni. Insieme quoziente. Esempi. Relazione d'equivalenza ("nucleo") associata ad una applicazione. Teorema fondamentale di decomposizione di una applicazione. Esempi.

Relazioni di ordine e ordine totale. Diagrammi (lineari) di insiemi ordinati. Maggioranti, minoranti, elementi massimali, elementi minimali, minimo e massimo, estremi inferiori e superiori. Esempi.

Argomenti facoltativi.

(1) Algebre booleane e circuiti elettrici. Algebra delle proposizioni (logiche).

(2) Introduzione alla nozione di cardinalità.
Caratterizzazione degli insiemi infiniti come gli insiemi equipotenti ad un (opportuno) sottoinsieme proprio. Cardinalità del numerabile e del continuo. Teoremi di G. Cantor. Cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme. Esempi di insiemi numerabili e continui.

2. Numeri Naturali

Assiomi di Peano; addizione, moltiplicazione e relazione d'ordine nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Principio di induzione (e sua formulazione forte). Principio del Buon Ordinamento (cenni). Dimostrazioni per induzione. Coefficienti binomiali e triangolo di Tartaglia.

Ulteriore argomento facoltativo

(3) Equivalenza tra il Principio del Buon Ordinamento ed il Principio di Induzione. Vari tipi di dimostrazione per induzione. Esempi.

3. Insiemi numerici

Costruzione di $\mathbb{Z}$ (numeri interi relativi) a partire da $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{Q}$ (numeri razionali) a partire da $\mathbb{Z}$. Introduzione delle operazioni di somma e prodotto e della relazione di ordine in $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Prime proprietà.

Costruzione dell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Rappresentazione "geometrica" dei numeri complessi nel piano di Gauss. Rappresentazione

trigonometrica di un numero complesso; formula di de Moivre; radici n-esime di un numero complesso. Radici n-esime dell'unità e radici

primitive (cenni).

4. Divisibilità in $\mathbb{Z}$ e congruenze modulo n.

Divisione con il resto. Esistenza di MCD e mcm; algoritmo di Euclide per la determinazione del MCD. Identità di Bézout. Lemma di Euclide. Scrittura in base b ($b > 1$) dei numeri naturali.

Numeri primi. Elementi irriducibili. Teorema fondamentale dell'aritmetica. Teorema sull'infinità dei numeri primi. Crivello di Eratostene.

Congruenze e criteri di divisibilità. Somma e prodotto nell'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\equiv_n$ delle classi resto modulo un intero $n > 1$. Principali proprietà algebriche ed aritmetiche di $(\mathbb{Z}/\equiv_n, +, \cdot)$. Elementi invertibili e "divisori dello zero" in $\mathbb{Z}/\equiv_n$. Indicatore di Euler.

Il teorema di Euler-Fermat. Teorema di Wilson e caratterizzazione dei numeri primi.

Calcolo di un inverso aritmetico mod n. Congruenze lineari in una indeterminata. Criterio di risolubilità, numero di soluzioni e ricerca di soluzioni. Esempi.

Sistemi di congruenze lineari. Teorema cinese dei resti. Risoluzione di sistemi di congruenze lineari. Esempi

5. Cenni sulle strutture algebriche: Gruppi ed Anelli

Operazioni e loro proprietà. Elementi neutri e invertibili. Unicità dell'elemento neutro e dell'inverso di un elemento. Notazione additiva e moltiplicativa.

Gruppi. Gruppi abeliani. Esempi. Prime proprietà. Leggi di cancellazione. Sottogruppi. Esempi. Sottogruppi normali. Esempi. Omomorfismi di gruppi. Esempi. Prime proprietà. Teorema Fondamentale di Omomorfismo di gruppi. Esempi.

Gruppi di permutazioni. Prime proprietà del gruppo S_n. Cicli e teorema di decomposizione (cenni). Trasposizioni, parità di una permutazione (cenni).

Anelli. Esempi. Prime proprietà. Anelli commutativi e unitari. Esempi. Elementi invertibili e divisori dello zero. Domini d'integrità. Campi. Esempi. Omomorfismi di anelli. Prime proprietà. Esempi. Teorema Fondamentale di Omomorfismo di anelli. Esempi. Caratteristica di un anello unitario. Esempi.

6. Polinomi

Polinomi e serie formali in una indeterminata: somma, prodotto (di convoluzione). Polinomi a coefficienti in un dominio d'integrità: grado. Prime proprietà. Elementi invertibili e associati.

Polinomi monici. Divisione con il resto tra polinomi. Teorema del resto. Regola di Ruffini. Esempi. Radici di un polinomio. Esistenza di radici e riducibilità. Ricerca di radici intere e razionali di polinomi a coefficienti interi.

Polinomi a coefficienti numerici. Enunciato del Teorema Fondamentale dell'Algebra. Polinomi irriducibili di $\mathbb{C}[X]$ e di $\mathbb{R}[X]$.

Polinomi a coefficienti interi: contenuto di un polinomio, polinomi primitivi. Lemma di Gauss. Teorema di fattorizzazione unica in $\mathbb{Z}[X]$. Polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$ ed in $\mathbb{Q}[X]$.

Criterio di irriducibilità di Eisenstein. Esempi ed applicazioni (irriducibilità del p-polinomio ciclotomico).

Polinomi a coefficienti in un campo K (cenni): algoritmo di divisione, esistenza ed unicità del MCD monico. Identità di Bézout. Polinomi irriducibili e teorema di fattorizzazione unica in $K[X]$ (cenni).

Testi consigliati

[1] M. Fontana – S. Gabelli, *Insiemi, numeri e polinomi. Primo ciclo di lezioni del Corso di Algebra con esercizi svolti*. CISU, (1989).

[2] M. Fontana – S. Gabelli, *Esercizi di Algebra*. Aracne, (1993).

[3] M. Fontana, *Appunti sui primi rudimenti di teoria dei gruppi e teoria degli anelli*. www.mat.uniroma3.it/didatticacds/corsi/didattica_interattiva/aa_02_03/al1/al1.html,

[4] G.M. Piacentini Cattaneo, *Algebra, un approccio algoritmico*. Decibel – Zanichelli, (1996).

Bibliografia supplementare

[5] R.B.J. Allenby, *Rings, fields and groups*. E. Arnold, Hodder& Staughton, (1991).

[6] M. Artin, *Algebra*. Prentice–Hall, (1991).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	□ SI	■ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		□ SI	■ NO

L'esame consiste di una prova scritta nella quale sono presenti questioni di carattere teorico.

Gli studenti che hanno sostenuto con esito positivo, nel corso del semestre, le prove di valutazione parziale ("esoneri") accedono direttamente alla valutazione finale nell'Appello di Gennaio (Appello A).

Gli studenti che hanno sostenuto con esito soddisfacente soltanto una delle due prove di valutazione parziale possono, *in occasione della prova scritta dell'appello di Gennaio (Appello A),* sostenere la prova scritta di tale Appello soltanto per la parte riguardante l'altra unità didattica. Si noti che, in presenza di una valutazione positiva delle prove parziali durante il corso, l'eventuale consegna da parte dello studente della successiva prova scritta di esame comporta la rinuncia implicita al "voto di esonero". *Pertanto, in tal caso, la valutazione del profitto del corso verrà effettuata in base alla prova d'esame.*